

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”
ETAPA LOCALĂ - 14.02.2026**

Clasa a X-a

**Secțiunea H₁ - Filieră tehnologică, toate profilurile și specializările
BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

Problema 1 (20 de puncte)

Se dă expresia $E(x, y) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-2} \cdot (x^{-1} + y^{-1}) + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-3} \cdot (\sqrt{x}^{-1} + \sqrt{y}^{-1})$,
unde $x, y \in (0, +\infty)$.

a) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

b) Calculați $E(x, y)$ pentru $x^{-1} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ și $y = 2 \cdot 3^{\frac{7}{2}}$.

Soluție:

$$a) \quad E(x, y) = \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x \cdot y(x+y+2\sqrt{xy})} \quad (5p)$$

$$E(x, y) = \frac{1}{x \cdot y} \quad (5p)$$

$$b) \quad x = \frac{3\sqrt{3}}{2}; y = 54\sqrt{3}. \quad (5p)$$

$$E(x, y) = \frac{1}{243}. \quad (5p)$$

Problema 2 (20 de puncte)

Demonstrați inegalitățile:

$$a) \quad \frac{1}{\log_9 18 - \log_{18} 36} > 12;$$

$$b) \quad -6 < \frac{1}{\log_{3a}(9a) - \log_a(3a)} < -2, \text{ dacă } 3 < a < 9.$$

Soluție:

$$a) \quad \frac{1}{\log_9 18 - \log_{18} 36} = \frac{1 + \log_9 2}{(\log_9 2)^2}. \quad (5p)$$

$$\text{Din } \log_9 2 \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) \text{ rezultă inegalitatea.} \quad (5p)$$

$$b) \quad \frac{1}{\log_{3a}(9a) - \log_a(3a)} = (-\log_3 a)(1 + \log_3 a) \quad (5p)$$

$$\text{Din } 3 < a < 9 \Rightarrow 1 < \log_3 a < 2 \Rightarrow \begin{cases} 2 < 1 + \log_3 a < 3 \\ 1 < \log_3 a < 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2 < (1 + \log_3 a) \log_3 a < 6 \Rightarrow -2 > -(1 + \log_3 a) \log_3 a > -6 \quad (5p)$$

Problema 3 (20 de puncte)

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = 1$ și $1 + z_1 \cdot z_2 \neq 0$. Demonstrați că $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \cdot z_2} \in \mathbb{R}$.

Soluție:

Dacă $|z| = 1$ atunci $z \cdot \bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$. (5p)

Aplicăm pentru z_1 și z_2 : $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$. (5p)

$$w = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 \cdot z_2}$$

$$\bar{w} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{1 + \overline{z_1 \cdot z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1 z_2}} = \frac{\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}}{\frac{1 + z_1 z_2}{z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = w \Rightarrow w \in \mathbb{R}$$

Deci $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ este număr real. (10p)

Problema 4 (30 de puncte)

Carbonul radioactiv se dezintegrează în timp conform legii $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$. Se știe că timpul de înjumătățire al carbonului -14 este de 5730 de ani. O probă arheologică conține 6,25% din cantitatea inițială de carbon -14 .

- Determinați constanta de dezintegrare λ .
- Determinați vechimea fragmentului.
- Stabiliți după câți ani cantitatea de carbon -14 din fragment va fi 1,5625% din cantitatea inițială.

Soluție:

$$a) \quad N(5730) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 5730} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{5730}. \quad (10p)$$

$$b) \quad 6,25\% = 0,0625 = 2^{-4} \\ e^{-\lambda t} = e^{-4 \ln 2} \Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{5730} t = -4 \ln 2 \Rightarrow t = 4 \cdot 5730 = 22920 \text{ ani.} \quad (10p)$$

$$c) \quad 1,5625\% = 0,015625 = 2^{-6} \\ e^{-\lambda t} = e^{-6 \ln 2} \Leftrightarrow -\frac{\ln 2}{5730} t = -6 \ln 2 \Rightarrow t = 6 \cdot 5730 = 34380 \text{ ani.} \quad (10p)$$